«Интеграл и его приложения»

Методическое пособие по предмету математика

РАЗРАБОТАЛ ПРЕПОДАВАТЕЛЬ *Забигуллина О.В.*

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Математика является фундаментальной дисциплиной. Ее преподавание предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение основными численными методами математики и их простейшими реализациями на ЭВМ;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Общий курс математики является фундаментом образования специалиста, имеющим важное значение для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебными планами различных специальностей. «Интеграл и его приложения» является одним из разделов дисциплины «Математика», изучается на I и II курсах после раздела «Введение в математический анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Данное методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения, студентов-заочников всех специальностей и в помощь преподавателю математики. Пособие содержит краткое изложение теоретического материала по разделу «Интеграл и его приложения», соответствующего рабочей программе по математике.

Изложение теоретического материала сопровождается решением типовых примеров, которые позволят студентам самостоятельно выполнять задания по математике, а также вопросы, задачи и тренинг-тест для самопроверки, позволяющие лучше усвоить и закрепить материал.

Целью данного методического пособия является ознакомление студента с основными понятиями интегрального исчисления, способами интегрирования и некоторыми приложениями интегралов, оказание помощи учащимся в организации их самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений и навыков по данному разделу.

Студент, успешно изучивший «Основы интегрального исчисления», должен знать:

- определения неопределенного и определенного интегралов;
- свойства интегралов;
- различные методы вычисления неопределенных и определенных интегралов;
- приложения интегралов.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $F(x)$ определена на множестве D, которое является либо отрезком, либо конечным или бесконечным интервалом.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на множестве D, если в каждой точке множества D она дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Если $f(x) = x^2$, то $F(x) = \frac{x^3}{3}$ для всех $x \in (0, \infty)$.

Действительно, $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Пример 2. Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $F(x) = \ln x$ для всех $x \in (0, \infty)$.

Действительно, $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ для всех $x \in (-0, \infty)$.

Очевидно, что если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на множестве D, то функция $F(x) + C$, где C- произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$ на множестве D, так как $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Операция нахождения первообразной - интегрирование является обратной к операции нахождения производной.

Теорема 1. *Пусть* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$- *любые первообразные для* $f(x)$ *на множестве* D*, тогда* $F_1(x) - F_2(x) = C$ *для всех* $x \in D$*, где* C- *некоторая постоянная.*

Следствие. *Если* $F(x)$ *одна из первообразных для функции* $f(x)$ *на множестве* D*, то любая первообразная* $\Phi(x)$ *для* $f(x)$ *на множестве* D *представляется в виде* $\Phi(x) = F(x) + C$*, где* C- *некоторая постоянная.*

Определение 2. Совокупность всех первообразных для $f(x)$ на множестве D называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, выражение $f(x)dx$- подынтегральным выражением, а функция $f(x)$ - подынтегральной функцией.

Если $F(x)$ одна из первообразных для функции $f(x)$ на множестве D, то в силу следствия из теоремы 1

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1}$$

где C- произвольная постоянная.

Пример. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Замечание. Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на множестве D, то в формуле (1) под знаком интеграла стоит дифференциал функции $F(x)$, действительно $dF = F'(x)dx = f(x)dx$. Будем считать по определению, что

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x)\,. \tag{2}$$

1.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Здесь под интегралом $\int f(x)dx$ понимается любая первообразная $F(x)$ функции $f(x)$. Эта формула справедлива в силу того, что

$$d\int f(x)dx = d[F(x) + C] = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до константы, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы (разности) функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции, т.е.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

5. Постоянный множитель (k- действительное число) можно вынести за знак неопределенного интеграла, т.е.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Свойства 4 и 5 выражают свойства линейности неопределенного интеграла относительно подынтегральной функции.

1.3. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (ТАБЛИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ)

1. $\int dx = x + C$;	2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ (\alpha \neq -1)$;
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$;	4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;	6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;	8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg x + C$;	12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$;
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right\| + C$;	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$;
15. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + C$;	16. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$;

Замечание 1. Доказательство всех указанных в таблице формул проводится непосредственным дифференцированием правых частей и проверкой совпадения результата дифференцирования с подынтегральными функциями.

Замечание 2. Операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций, однако можно показать, что интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями, например интеграл Пуассона $\int e^{-x^2} dx$.

Примеры для самостоятельного решения:

№	Задание	Ответ
1.	$\int (6x^2 + 8x + 3)dx$	$2x^3 + 4x^2 + 3x + C$
2.	$\int \sqrt{2px}dx$	$\frac{2}{3}x\sqrt{2px} + C$
3.	$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$	$\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + C$
4.	$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$	$\left(\frac{3}{13}x^4 - \frac{3}{7}x^2 - 6\right)\sqrt[3]{x} + C$
5.	$\int \frac{dx}{x^2+7}$	$\frac{1}{\sqrt{7}} arctg \frac{x}{\sqrt{7}} + C$
6.	$\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} + C$

1.4. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1.4.1. МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием.*

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»):

$$du = d(u+a), \quad где \quad a - число,$$

$$du = \frac{1}{a} d(au), \quad где \quad a \neq 0 - число,$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2} d(u^2),$$

$$\cos u du = d(\sin u),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} du = d(tgu).$$

Вообще, $f'(u)du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Пример 1. $\int (3x-1)^4 dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^4 d(3x-1) = = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{4+1}}{4+1} + C =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^5}{5} + C = \frac{(3x-1)^5}{15} + C$.

Пример 2. $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int \sin^4 x \cdot d(\sin x) = = \frac{\sin^{4+1} x}{4+1} + C = = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

Пример 3. $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = = \ln|x+3| + C$.

Примеры для самостоятельного решения:

№	Задание	Ответ
1.	$\int \frac{dx}{2x+5}$	$\frac{1}{2}\ln\lvert 2x+5\rvert + C$
2.	$\int cos(5x+2)dx$	$\frac{1}{5}\sin(5x+2) + C$
3.	$\int (4x-7)^6 dx$	$\frac{1}{28}(4x-7)^7 + C$
4.	$\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$	$\frac{1}{3}\ln^3 x + C$
5.	$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3+\sin x}}$	$2\sqrt{3+\sin x}) + C$
6.	$\int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 + C$

1.4.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Предположим, что существует дифференцируемая функция $\varphi(x)$ и функция $g(u)$ такие, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть записано в виде

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x) = g(u)du\ .$$

Это преобразование называется подведением $\varphi'(x)$ под знак дифференциала. В этом случае справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int g(\varphi(x))d\varphi(x) = \int g(t)dt$, *где* $t = \varphi(x)$.

По этой теореме вычисление интеграла $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(t)dt$, который может оказаться проще исходного, и последующей подстановке $t = \varphi(x)$.

Пример 1. $$\int (2-5x)^7 dx = \left| \begin{array}{l} \textit{делаем замену} \\ t = 2-5x \\ dt = -5dx \\ dx = -\dfrac{dt}{5} \end{array} \right| = \int t^7 \frac{dt}{-5} = -\frac{1}{5}\int t^7 dt =$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{t^{7+1}}{7+1} + C = -\frac{1}{5}\cdot\frac{t^8}{8} + C = -\frac{t^8}{5\cdot 8} + C = -\frac{(2-5x)^8}{40} + C\ .$$

Пример 2. $$\int x^2\sqrt{x^3+10} = \int x^2(x^3+10)^{\frac{1}{2}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{делаем замену} \\ \mathrm{t} = x^3+10 \\ dt = 3x^2dx \\ x^2dx = \dfrac{dt}{3} \end{array} \right| = \int t^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{9} + C = \frac{2\sqrt{t^3}}{9} + C = \frac{2\sqrt{\left(x^3+10\right)^3}}{9} + C$$

2. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Введем новую переменную u формулой $x = \phi(u)$, где $\phi(u)$ - строго монотонная, дифференцируемая функция.

Подставим $x = \phi(u)$ в исходное подынтегральное выражение, получим $f(x)dx = f(\phi(u))\cdot\phi'(u)du = g(u)du$. Тогда справедливо утверждение, аналогичное утверждению теоремы 2.

Теорема 3. $\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)du = \int g(t)dt$, *где* $t = \phi^{-1}(x)$ - *функция, обратная к* $x = \phi(t)$.

По этой теореме вычисление интеграла $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(t)dt$, который может оказаться проще исходного, и последующей подстановке $t = \phi^{-1}(x)$.

Пример 3. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{делаем замену} \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{e^t}{t} \cdot 2tdt = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$.

Пример 4. $\int \frac{x + \cos 2x}{x^2 + \sin 2x}dx = \left| \begin{array}{l} \text{делаем замену} \\ u = x^2 + \sin 2x \\ du = (2x + 2\cos 2x)dx \\ (x + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}du; \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2 + \sin 2x| + C.$$

Примеры для самостоятельного решения:

№	Задание	Замена	Ответ
1.	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}$	$x = \frac{1}{t}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x} + C$
2.	$\int \frac{dx}{e^x + 1}$	$x = -\ln t$	$-\ln(1 + e^{-x}) + C$
3.	$\int x(5x^2 - 3)^7 dx$	$5x^2 - 3 = t$	$\frac{1}{80}(5x^2 - 3)^8 + C$
4.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$	$t = \sqrt{x+1}$	$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$
5.	$\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$	$t = \sin x$	$\ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}) + C$
6.	$\int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$t = \arcsin x$	$\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 + C$

1.4.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *дифференцируемы на множестве* D *и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции* $v(x)u'(x)$. *Тогда на множестве* D *существует первообразная для функции* $u(x)v'(x)$ *и справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx \qquad (1)$$

Замечание. Определение дифференциала и свойство инвариантности его формы позволяют записать эту формулу в виде

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu.$$

Формула (1) сводит вопрос о вычислении интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$. В ряде конкретных случаев этот последний интеграл проще исходного.

Вычисление интеграла $\int u dv$ посредством применения формулы (1) называют интегрированием по частям.

Пример 1. $\int x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} \text{Положим } u = x, \quad dv = \sin x dx, \\ \text{тогда } du = dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x + \int \cos x dx =$

$= -x\cos x + \sin x + C$.

Пример 2. $\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} \text{Положим } u = \ln x, \quad dv = x^2 dx, \\ \text{тогда } du = \dfrac{dx}{x}, \quad v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \ln x \cdot \dfrac{x^3}{3} - \int \dfrac{x^3}{3} \cdot \dfrac{dx}{x} =$

$= \dfrac{1}{3} x^3 \ln x - \dfrac{1}{3} \int x^2 dx = \dfrac{1}{3} x^3 \ln x - \dfrac{1}{9} x^3 + C$.

Пример 3. $\int arctgx dx = \left| \begin{array}{l} \text{Положим } u = arctgx, \quad dv = dx, \\ \text{тогда } du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \quad v = x \end{array} \right| = xarctgx - \int \dfrac{xdx}{1+x^2} =$

$= xarctgx - \dfrac{1}{2} \int \dfrac{d(1+x^2)}{1+x^2} = xarctgx - \dfrac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$.

Примеры для самостоятельного решения:

№	Задание	Ответ
1.	$\int \ln x dx$	$x\ln x - x + C$
2.	$\int arctg\sqrt{7x-1}\, dx$	$xarctg\sqrt{7x-1} - \dfrac{\sqrt{7x-1}}{7} + C$
3.	$\int \arcsin x dx$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
4.	$\int xe^{-x} dx$	$-(x+1)e^{-x} + C$
5.	$\int x\cos 3x dx$	$\dfrac{1}{3} x\sin 3x + \dfrac{1}{9}\cos 3x + C$
6.	$\int x^2 e^{3x} dx$	$\dfrac{1}{27}(9x^2 - 6x + 2)e^{3x} + C$
7.	$\int \dfrac{\ln x}{x^3} dx$	$-\dfrac{\ln x}{2x^2} - \dfrac{1}{4x^2} + C$
8.	$\int \dfrac{xdx}{\sin^2 x}$	$-xctgx + \ln\lvert\sin x\rvert + C$
9.	$\int e^x \sin x dx$	$\dfrac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C$

1.4.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Рассмотрим интеграл вида $J_4 = \int R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(u, v)$ есть рациональная функция своих аргументов $u = \sin x$ и $v = \cos x$.

Теорема 1. *В результате замены переменной* $t = tg\frac{x}{2}$ *в* J_4 *получится интеграл от рациональной функции относительно* t.

Действительно, $\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Из подстановки $t = tg\frac{x}{2}$ следует, что $x = 2arctgt$ и $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. В результате указанной замены переменной получим

$$J_4 = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ - рациональная функция от t.

Пример 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|tg\frac{x}{2}| + C.$

Пример 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin x + 5\cos x} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{2dt}{5+6t-5t^2} =$

$$= -\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2 - \frac{6}{5}t - 1} = -\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{34}{25}} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{34}{25}}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{5}-\sqrt{\frac{34}{25}}}{t-\frac{3}{5}+\sqrt{\frac{34}{25}}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{34}}\ln\left|\frac{5t-3-\sqrt{34}}{5t-3+\sqrt{34}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{34}}\ln\left|\frac{5tg\frac{x}{2}-3-\sqrt{34}}{5tg\frac{x}{2}-3+\sqrt{34}}\right| + C.$$

Применение универсальной подстановки $t = tg\frac{x}{2}$ часто связано с громоздкими вычислениями. В некоторых случаях интеграл может быть вычислен проще – как указано в теоремах 2, 3 и 4.

Теорема 2. *Если подынтегральная функция в* J_4 *нечетна относительно* $\cos x$, *то есть* $R(u,-v) = -R(u, v)$, *то подстановка* $t = \sin x$ *приводит* J_4 *к интегралу от рациональной функции относительно* t.

Пример. $\int\cos^3 xdx = \int\cos^2 x\cos xdx = \int(1-\sin^2 x)\cos xdx =$

$$= \left|\begin{matrix}\text{Положим } t = \sin x, \\ dt = \cos xdx\end{matrix}\right| = \int(1-t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Теорема 3. *Если подынтегральная функция в* J_4 *нечетна относительно* $\sin x$, *то есть* $R(-u, v) = -R(u, v)$, *то подстановка* $t = \cos x$ *приводит* J_4 *к интегралу от рациональной функции относительно* t.

Пример. $\int\sin^5 xdx = \int\sin^4 x\sin xdx = \int(1-\cos^2 x)^2\sin xdx =$

$$= \left| \begin{matrix} \text{Положим } t = \cos x, \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -\int (1-t^2)^2\, dt = -\int (1-2t^2+t^4)\, dt = -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = .$$

$$= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Теорема 4. *Если подынтегральная функция* $R(\sin x,\ \cos x)$ *четна относительно совокупности переменных* $\sin x,\ \cos x$*, то есть* $R(-u, -v) = R(u,\ v)$*, то подстановка* $t = tgx$ *приводит* J_4 *к интегралу от рациональной функции относительно* t.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \left| \begin{matrix} \text{Положим } t = tgx, \text{ тогда } \sin x = \dfrac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = arctgt, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2} + \dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1-\sqrt{2}} \right| + C.$$

Интеграл вида $J_5 = \int \sin^p x \cos^q x dx$, где p и q - целые числа, есть частный случай интеграла вида J_4. Поэтому к нему относятся все четыре теоремы об интегралах вида J_4, и мы приходим к следующему заключению. Рекомендуется подстановка: $t = \sin x$, если q- нечетное число; $t = \cos x$, если p - нечетное число; $t = tgx$, если $p+q$- четное число.

Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$ при любых a и b приводятся к алгебраической сумме табличных интегралов путем представления произведения тригонометрических функций соответствующей суммой по известным формулам тригонометрии.

Примеры для самостоятельного решения:

№	Задание	Ответ
1.	$\int \sin^3 x dx$	$\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$
2.	$\int \cos^5 x dx$	$\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C$
3.	$\int \sin^4 x dx$	$\frac{1}{32}(12x - 8\sin 2x + \sin 4x) + C$
4.	$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$	$-ctgx - \frac{1}{3}ctg^3 x + C$

5.	$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$	$\frac{1}{2} tg^2 x + 3\ln\lvert tgx\rvert - \frac{3}{2tg^2 x} - \frac{1}{4tg^4 x} + C$
6.	$\int ctg^3 x dx$	$-\frac{1}{2} ctg^2 x - \ln\lvert \sin x\rvert + C$
7.	$\int \sin 3x \cos 5x dx$	$\frac{1}{16}(4\cos 2x - \cos 8x) + C$
8.	$\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$	$\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{2 + tg\frac{x}{2}}{2 - tg\frac{x}{2}}\right\rvert + C$
9.	$\int \frac{1 + tgx}{1 - tgx} dx$	$-\ln\lvert \cos x - \sin x\rvert + C$
10.	$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$	$arctg\left(1 + tg\frac{x}{2}\right) + C$

1.5. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Какая функция называется первообразной данной функции?
2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
3. Какое действие называется интегрированием?
4. Каким действием можно проверить интегрирование?
5. Как производится замена переменной в неопределенном интеграле?
6. Как производится интегрирование по частям в неопределенном интеграле?
7. Назовите основные свойства неопределенного интеграла.

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОПРЕДЕЛЕННОМУ ИНТЕГРАЛУ

1. Задача о площади криволинейной трапеции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и положительна в промежутке $[a, b]$. Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$ и $x = b$.

Такие фигуры называются *криволинейными трапециями*. Требуется вычислить площадь этой фигуры. Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей

$$[a, x_1], \quad [x_1, x_2], \ \ldots, \ [x_{n-1}, b],$$

длины которых обозначим соответственно через Δx_1, Δx_2, …, Δx_n, а наибольшую из них обозначим символом λ_n. Через каждую точку деления проведем прямую, параллельную оси ординат. Эти прямые разделят криволинейную трапецию на n элементарных частей.

Заменим каждую элементарную полоску прямоугольником, основание которого то же, что и у полоски, а высота совпадает с одной из ординат полоски. Площадь k-го прямоугольника будет равна $f(c_k)\Delta x_k$, где c_k- произвольное число из промежутка $[x_{k-1}, x_k]$. Просуммировав площади всех прямоугольников, получим площадь ступенчатой фигуры $\sigma_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$.

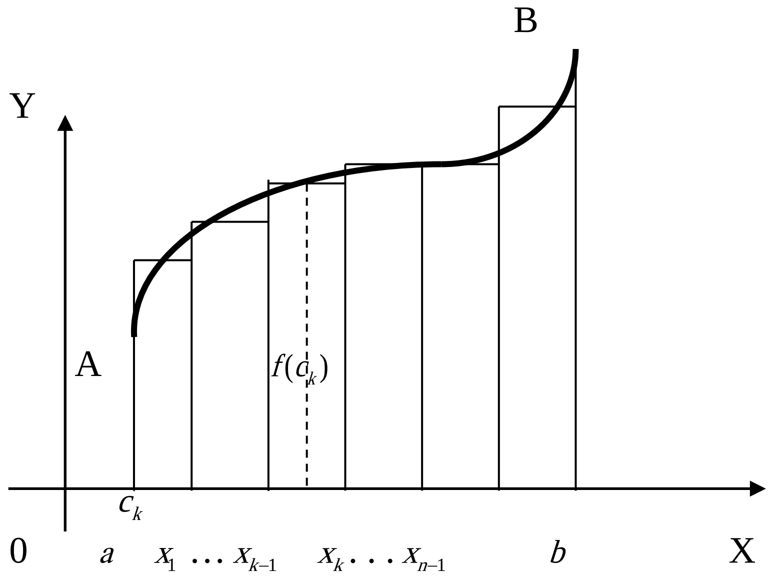

Рис. 1

В частности, если в каждом элементарном промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ выбрать наименьшую ординату m_k, а затем наибольшую ординату M_k, то можно построить еще две ступенчатые фигуры с площадями, соответственно равными

$$s_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n \quad \text{и} \quad S_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n$$

Первая из них содержится внутри криволинейной трапеции, а вторая, наоборот, содержит криволинейную трапецию, причем $s_n \le \sigma_n \le S_n$.

Желая сблизить между собой величины s_n и S_n, будем увеличивать число n, уменьшая при этом длины всех элементарных промежутков Δx_k. Пользуясь непрерывностью $f(x)$, можно доказать, что существуют и равны между собой пределы переменных s_n и S_n при $\lambda_n \to 0$ и что они не зависят от способа деления $[a, b]$ на части. Следовательно, переменная σ_n имеет тот же предел $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} s_n = \lim\limits_{\lambda_n \to 0} \sigma_n = \lim\limits_{\lambda_n \to 0} S_n$.

Площадь криволинейной трапеции естественно определить как предел площади σ_n упомянутой ступенчатой фигуры при $\lambda_n \to 0$:

$$S = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k . \qquad (1)$$

2. Задача об объеме произведенной продукции.
Пусть функция $z = f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объем продукции, произведенной за промежуток времени $[0, T]$.

Отметим, что если производительность не изменяется с течением времени ($f(t)$- постоянная функция), то объем продукции Δu, произведенной за некоторый промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ задается формулой $\Delta u = f(t)\Delta t$. В общем случае справедливо приближенное равенство $\Delta u = f(c)\Delta t$, где $c \in [t, t+\Delta t]$, которое оказывается тем более точным, чем меньше Δt.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на промежутки времени точками: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$. Для величины объема продукции Δu_i, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$,

имеем $\Delta u_i = f(c_i)\Delta t_i$, где $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, ..., n$. Тогда объем продукции u, произведенный за весь промежуток времени $[0, T]$, будет равен $u \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$.

При стремлении $\max\limits_i \Delta t_i$ к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому *объем произведенной продукции равен*

$$u = \lim_{\max\limits_i \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i . \qquad (2)$$

2.2. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $y = f(x)$ определена в замкнутом промежутке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n элементарных частей (не обязательно равных) $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, b]$, длины которых обозначим соответственно через Δx_1, Δx_2, …, Δx_n, а наибольшую из этих длин обозначим символом λ_n. Множество элементов $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, b]$ назовем разбиением δ_n.

Обозначим через c_1, c_2, …, c_n - точки, выбранные произвольно, по одной в каждом элементарном промежутке. Составим сумму $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, она называется *интегральной суммой функции* $f(x)$, соответствующей данному разбиению промежутка $[a, b]$ и данному выбору точек c_k.

Последовательность разбиений $\{\delta_n\}$ будем называть нормальной, если $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Выбрав произвольную нормальную последовательность разбиений $\{\delta_n\}$ и составив для каждого разбиения δ_n соответствующую интегральную сумму σ_n, получим последовательность сумм $\{\sigma_n\}$. Для данной последовательности разбиений $\{\delta_n\}$ можно получить разные последовательности сумм $\{\sigma_n\}$ в зависимости от того, какие точки c_k выбраны.

Определение. Функция $f(x)$ называется интегрируемой в промежутке $[a,b]$, если для каждой нормальной последовательности разбиений $\{\delta_n\}$ соответствующая последовательность интегральных сумм $\{\sigma_n\}$ имеет конечный предел, не зависящий от способа деления промежутка $[a,b]$ на элементы и от выбора точек c_k. Этот общий предел последовательности $\{\sigma_n\}$, соответствующий нормальным последовательностям разбиений, называют определенным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$ и обозначают символом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k . \tag{3}$$

Числа a и b называют пределами интегрирования, x- переменной интегрирования, $f(x)$- подынтегральной функцией, $f(x)dx$- подынтегральным выражением.

Ввиду сложности введенных понятий обратим внимание на следующее.

1. В определении речь идет о нормальной последовательности разбиений, когда не только $n \to \infty$, но и наибольшая из длин элементарных промежутков стремится к нулю.
2. Определенный интеграл есть число, которое равно пределу любой из последовательности интегральных сумм, соответствующей нормальной последовательности разбиений и какому-либо выбору точек c_k.
3. Не всякая функция интегрируема. Например, не интегрируема функция Дирихле, равная нулю в иррациональных точках промежутка [0, 1] и единице в его рациональных точках. Действительно, в этом случае при любом разбиении интегральную сумму можно сделать нулем или единицей путем выбора чисел c_k.

Теорема. *Функция* $f(x)$ *интегрируема в промежутке* $[a,b]$, *если выполнено*

любое из следующих условий:

1) $f(x)$ *непрерывна в замкнутом промежутке* $[a,b]$

2) $f(x)$ *ограничена и кусочно-непрерывна в* $[a,b]$, *то есть имеет в этом промежутке лишь конечное число разрывов первого рода*

3) $f(x)$ *определена и монотонна в замкнутом промежутке* $[a,b]$.

4. Определенный интеграл допускает различное геометрическое истолкование, одно из которых – площадь криволинейной трапеции. Действительно, так как в силу (1) площадь криволинейной трапеции

равна $S=\lim\limits_{\lambda_n\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ и согласно определения (3) интеграла $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

5. Определенный интеграл допускает также и экономическое истолкование. Действительно, если $f(t)$- производительность труда в момент времени t, то
 в силу соотношения (2) объем произведенной продукции за промежуток
 времени $[0, T]$ будет равен $u=\lim\limits_{\max\limits_i \Delta t_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$, а эта величина по
 определению (3) интеграла будет равна $u=\int\limits_0^T f(t)dt$.

Приведем пример нахождения определенного интеграла на основании определения.

Пример. Вычислить $\int\limits_0^1 x^2 dx$.

Запишем выражение для интегральной суммы, предполагая, что все отрезки
$[x_{i-1}, x_i]$ разбиения имеют одинаковую длину Δx_i, равную $\frac{1}{n}$, где n- число отрезков разбиения, причем для каждого из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$разбиения точка c_i совпадает с правым концом этого отрезка, то есть $c_i = x_i = \frac{i}{n}$, где $i=1, 2, 3,..., n$. В силу интегрируемости $y=x^2$ выбор такого «специального» способа разбиения отрезка интегрирования на части и точек c_1, c_2, …, c_n на отрезках разбиения не повлияет на искомый предел интегральной суммы. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 .$$

Известно, что сумма квадратов чисел натурального ряда равна $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Следовательно,

$$\int_0^1 x^2 dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

Анализ приведенного примера показывает, что успешное решение поставленной задачи оказалось возможным благодаря тому, что интегральную сумму удалось привести к виду, удобному для нахождения предела. Однако такая возможность существует далеко не всегда, поэтому долгое время задача интегрирования конкретных функций оставалась чрезвычайно сложной. Установление связи между определенным и неопределенным интегралами позволило разработать эффективный метод вычисления определенного интеграла, который будет рассмотрен в следующем пункте.

2.3. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. При перемене пределов интегрирования определенный интеграл меняет лишь знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. Величина определенного интеграла не зависит от названия (обозначения) переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b c\ f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы (разности) функций равен соответствующей сумме (разности) интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

6. Если промежуток $[a,b]$ разбит точкой c на части, то интеграл по всему промежутку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Если $f(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $[a,b]$, то и интеграл от $f(x)$ в пределах от a до b положителен:

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

8. Если $a < b$, функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и удовлетворяют соотношению $f(x) > g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx.$$

Теорема (об оценке интеграла). *Если $a < b$, то абсолютная величина* интеграла не превосходит интеграла от абсолютной величины подынтегральной функции:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Теорема (о среднем значении в интегральном исчислении). *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то интеграл от $f(x)$ в пределах от a до bравен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке $c \in [a,b]$ на длину промежутка интегрирования:*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

2.4. ОПРЕДЕНЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ФУНКЦИЯ ВЕРХНЕГО ПРЕДЕЛА

В определенном интеграле от интегрируемой на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ пределы постоянны и сам интеграл есть число. Если изменить величину верхнего предела не выходя из $[a,b]$, то изменится и величина интеграла, причем каждому значению верхнего предела соответствует определенное значение интеграла. Поэтому интеграл с переменным верхним пределом есть функция верхнего предела; обозначим ее

$$\varPhi(x) = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dx, \qquad a \le x \le b. \tag{1}$$

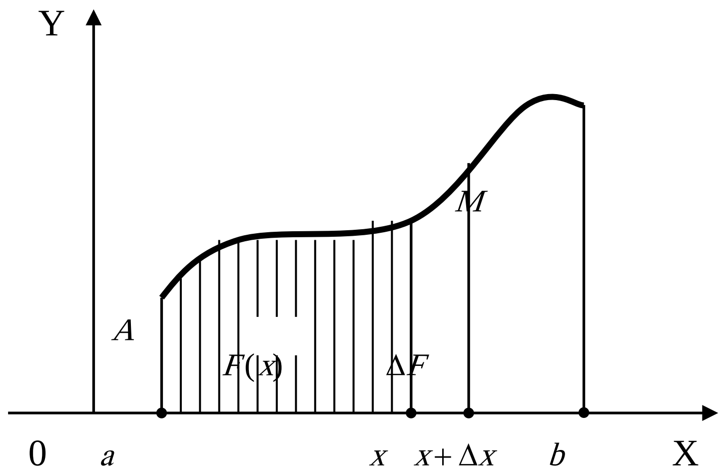

Рис. 2

Геометрически функцию $\varPhi(x)$ можно трактовать как площадь криволинейной трапеции $AMxa$ (рис.2), если $f(x) > 0$.

Теорема. *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то производная интеграла (1) по верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования:*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x).$$

Следствие. *Непрерывная на промежутке* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *имеет в этом промежутке первообразную.*

Действительно, такой первообразной является интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)$, потому что $\Phi'(x) = f(x)$.

2.5. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *в промежутке* $[a,b]$ *интегрируема и имеет первообразную* $F(x)$, *то имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Формула (4) носит название ***формула Ньютона-Лейбница*** и формулируется так: *определенный интеграл в пределах от* a *до* b *равен приращению первообразной для подынтегральной функции при переходе от* a *к* b; *при этом в качестве первообразной может быть взята любая из множества первообразных.*

Значение сформулированной теоремы состоит не только в том, что она дает удобное правило вычисления определенного интеграла. Кроме того, она устанавливает связь между определенным интегралом и неопределенным интегралом (точнее, первообразной функцией).

Правило вычисления определенного интеграла, согласно формуле Ньютона-Лейбница, заключается в выполнении следующих действий: 1) найдем первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции, 2) вычислим приращение $F(x)$ при переходе от a к b, то есть выполним так называемую *двойную подстановку* $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Согласно (4) получим

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Заметим, что в формуле Ньютона-Лейбница можно взять любую из первообразных для $f(x)$, потому что двойная подстановка дает результат, который не зависит от C:

$$[F(x) + C]\Big|_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$

Вычислить определенные интегралы по формуле Ньютона-Лейбница:

Пример 1. $\int_a^b e^x dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a.$

Пример 2. $\int_a^b 2x\,dx = x^2\Big|_a^b = b^2 - a^2.$

Пример 3. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \frac{1}{3}.$

Примеры для самостоятельного решения:

№	Задание	Ответ
1.	$\int\limits_1^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx$	$\frac{7}{3}$
2.	$\int\limits_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx$	$33\frac{1}{3}$
3.	$\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$	$\frac{7}{4}$
4.	$\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$	$5\frac{1}{3}$
5.	$\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$

2.6. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Метод замены переменной в определенном интеграле основывается на следующей теореме.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *определена и непрерывна в промежутке* $[a,b]$, *а функция* $x = \varphi(t)$ *- непрерывно дифференцируема в промежутке* $[\alpha, \beta]$, *при этом* $a \le \varphi(t) \le b$ *и* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *то имеет место формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (2)$$

Формула (2) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле.*

Пример 1. $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^5\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{Положим } t = 2 - x^2, \text{ тогда } \quad dt = -2x dx; \\ \text{если } x = 0, \text{ то } t = 2; \text{ если } x = 1, \text{ то } t = 1;\end{array}\right| =$

$$= \int\limits_2^1 t^5\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int\limits_2^1 t^5\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6}\Bigg|_2^1 = -\frac{1}{12}(1-2^6) = \frac{21}{4}.$$

Пример 2. $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{Положим } x = 2\sin t, \text{ тогда } \quad dx = 2\cos t dt; \\ \text{если } x = 0, \text{ то } t = 0; \text{ если } x = 2, \text{ то } t = \frac{\pi}{2};\end{array}\right| =$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi.$$

Примеры для самостоятельного решения:

№	Задание	Замена	Ответ
1.	$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	$x = t^2$	$4 - 2\ln 3$

2.	$\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3} dx$	$x-2=z^3$	$8-\frac{9\pi}{2\sqrt{3}}$
3.	$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$	$e^x-1=z^3$	$2-\frac{\pi}{2}$
4.	$\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}$	$tg\frac{t}{2}=z$	$\frac{\pi}{\sqrt{5}}$
5.	$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$	$tgx=t$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

2.7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Способ интегрирования по частям основывается на формуле

$$\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu,$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - непрерывно дифференцируемые в $[a,b]$ функции x.

Пример 1. $\int_0^{\pi/2} x\cos xdx = \left| \begin{matrix} \text{Положим } u=x,\ dv=\cos xdx \\ \text{тогда } du=dx,\ v=\sin x \end{matrix} \right| =$

$$=(x\sin x)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin xdx=\frac{\pi}{2}+(\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

Пример 2. $\int_0^1 \ln(1+x)dx = \left| \begin{matrix} \text{Положим } u=\ln(1+x),\ dv=dx \\ \text{тогда } du=\dfrac{dx}{1+x},\quad v=x \end{matrix} \right| =$

$$=(x\ln(1+x))\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\ln 2-(x-\ln(1+x))\Big|_0^1=$$

$$=\ln 2-(1-\ln 2)=2\ln 2-1.$$

Примеры для самостоятельного решения:

№	Задание	Ответ
1.	$\int_0^{\pi} x\sin xdx$	π
2.	$\int_1^{e} \ln xdx$	1
3.	$\int_0^{1} x^3e^{2x}dx$	$\frac{e^2+3}{8}$
4.	$\int_0^{\pi} e^x\sin xdx$	$\frac{e^{\pi}+1}{2}$

2.8. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2.8.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ

В пункте 2.1 определена площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$, $x = b$, как интеграл от функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ при условии, что $f(x) \geq 0$.

Площадь области, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и двумя непрерывными кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при условии $f(x) \geq g(x)$ (рис 3), определим как интеграл

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \ . \tag{1}$$

В частности, криволинейная трапеция, заданная равенствами $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и $y = f(x)$, при условии $f(x) \leq 0$ имеет площадь

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |\ f(x)\ |\ dx.$$

Следовательно, площадь криволинейной трапеции в случае, когда $f(x)$ может принимать в $[a, b]$ значения разных знаков, равна

$$S = \int_a^b |\ f(x)\ |\ dx. \tag{2}$$

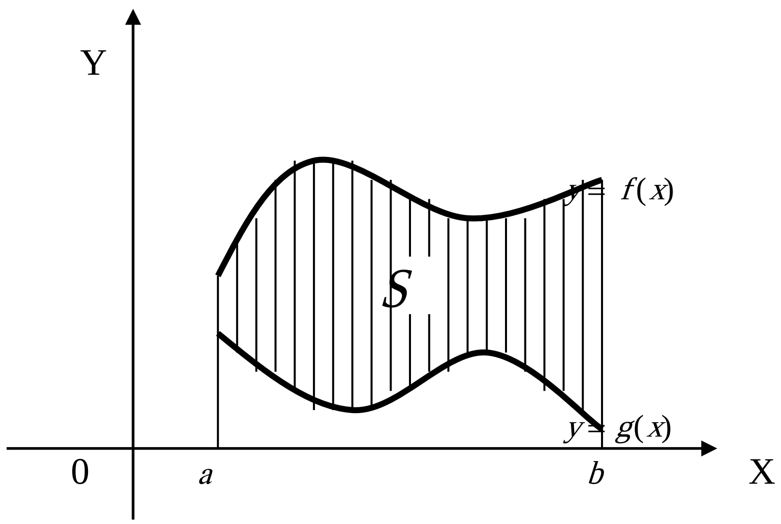

Рис. 3

Заметим, что при $a < b$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ дает алгебраическую сумму площадей, в которой каждая площадь, расположенная под осью Ox, входит со знаком минус. Он может быть отрицательным, в то время как площадь области всегда положительна. Для вычисления площади более сложного вида надо разбить всю область на части рассмотренного вида, найти площади этих частей и результаты сложить.

Пример 1. Найти площадь области, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью абсцисс при условии $0 \le x \le 2\pi$.

Решение:

Имеем $y \ge 0$ при $0 \le x \le \pi$, $y \le 0$ при $\pi \le x \le 2\pi$, и по формуле (2) получим

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} + (\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4 \text{ (кв.ед.)}$$

Пример 2. Найти площадь области, ограниченной линиями $y = \sin x$ и $y = \dfrac{2x}{\pi}$.

Решение:

Выполним построение фигуры, ограниченной указанными линиями (рис.4).

Данные линии пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$. По формуле (1) получим

$$S = \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2x}{\pi} \right) dx = \left(-\cos x - \frac{x^2}{\pi} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{4} .$$

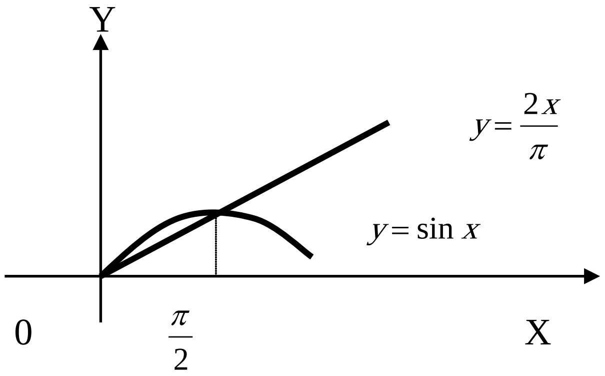

Рис. 4

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 2x \text{ и } y = -2x^2 + x.$$

Решение:

Чтобы наглядно представить фигуру, площадь которой надо найти, начертим графики функций $y = x^2 - 2x$ и $y = -2x^2 + x$.

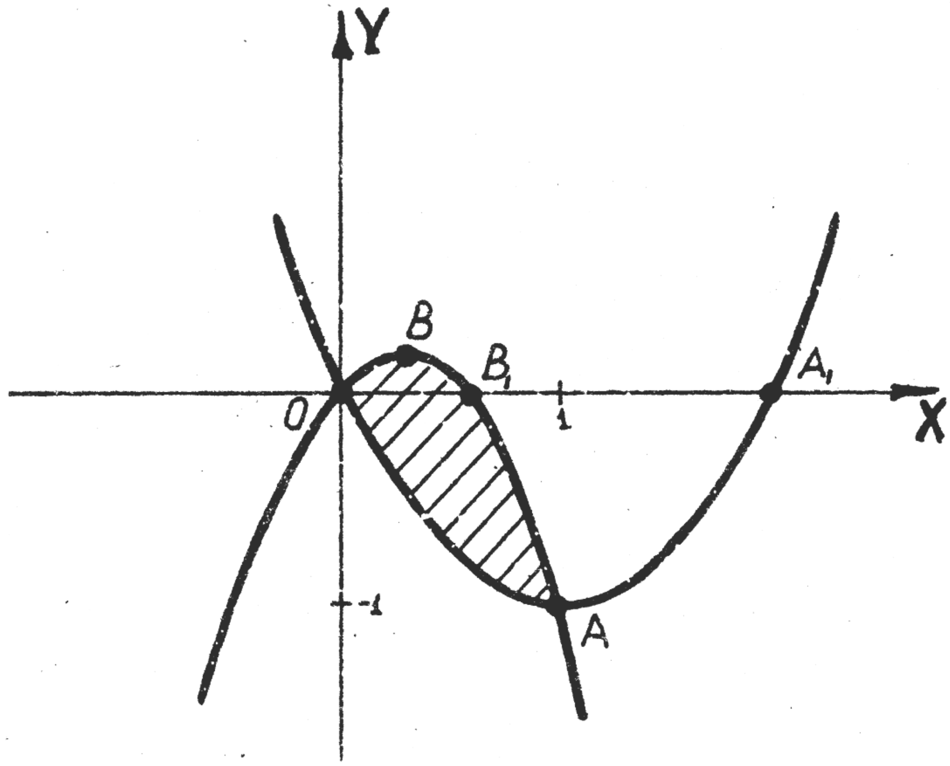

Рис. 5

Для построения параболы $y = x^2 - 2x$ определим координаты ее вершины и точек пересечения с осями координат. Выделив полный квадрат $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, получим координаты вершины параболы $A(1;-1)$. Ветви параболы направлены вверх, так как коэффициент при x^2, равный 1, положителен. Точки пересечения параболы с осью абсцисс найдем, решив квадратное уравнение $x^2 - 2x = 0$. Корни этого уравнения $x_1 = 0;$ $x_2 = 2$. Получили точки $O(0;0);$ $A_1(2;0)$. Точка пересечения с осью ординат находится при $x = 0$. Эта точка совпадает с точкой *A*. Для построения второй параболы $y = -2x^2 + x$ необходимо провести аналогичные действия. Получим вершину $B(1/4;1/8)$ и точки $O(0;0);$ $B_1(1/2\,;0)$. Ветви этой параболы направлены вниз, так как коэффициент при x^2 отрицателен. На рисунке 1 построены обе параболы. Заштрихованная часть плоскости является фигурой, площадь которой надо найти. Для определения абсцисс точек пересечения парабол решим уравнение $x^2 - 2x = -2x^2 + x$ или $3x^2 - 3x = 0$, откуда $x_1 = 0; \quad x_2 = 1$.

Площадь фигуры вычисляем по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx, \text{ где } f(x) \geq g(x) \text{ для всех } x \in [a;b]$$

В нашем случае $a = x_1 = 0; \quad b = x_2 = 1$. На отрезке $[0;1]$ имеем $-2x^2 + x \geq x^2 - 2x$. Поэтому $f(x) = -2x^2 + x$ и $g(x) = x^2 - 2x$.

Для вычисления определенного интеграла применяется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная подынтегральной функции $f(x)$.

Следовательно, искомая площадь равна

$$S = \int_0^1 \left[(-2x^2 + x) - (x^2 - 2x)\right]dx =$$

$$= \int_0^1 f(-3x^2 + 3x)dx = (-x^3 + \frac{3}{2}x^2)\Big|_0^1 = -(1)^3 + \frac{3}{2} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{2} \text{ (кв.ед.)}$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2$ и $y = x$ (рис. 5).

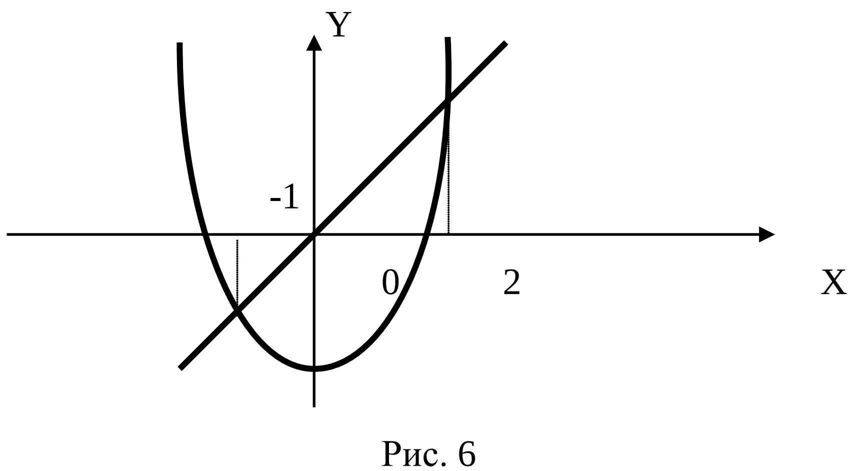

Рис. 6

Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = x$, решив систему этих уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - 2 = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0, \qquad x_1 = -1, \qquad x_2 = 2.$$

На отрезке [-1, 2] $x \geq x^2 - 2$, значит по формуле (1) получим

$$S = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(2 - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \right) = 4{,}5.$$

Примеры для самостоятельного решения:

№	Задание	Ответ
1.	Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.	$10\frac{2}{3}$
2.	Найти площадь, ограниченной кривой $y^3 = x$, прямой $y = 1$ и вертикалью $x = 8$.	$4\frac{1}{4}$
3.	Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.	$4\frac{1}{2}$
4.	Вычислить площадь, заключенную между параболами $y = \frac{x^2}{3}$ и $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.	$10\frac{2}{3}$
5.	Найти площадь, содержащуюся между первым и вторым витками спирали Архимеда $r = 2\varphi$.	$32\pi^3$
6.	Найти площадь одного лепестка кривой $r = \cos 2\varphi$.	$\frac{\pi}{8}$

2.8.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА

Рассмотрим тело B, содержащееся между плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис. 7). Пусть для каждого x из промежутка $[a, b]$ дана площадь сечения $S(x)$, перпендикулярного оси Ox. Требуется найти объем V данного тела при условии непрерывности $S(x)$ в $[a, b]$.

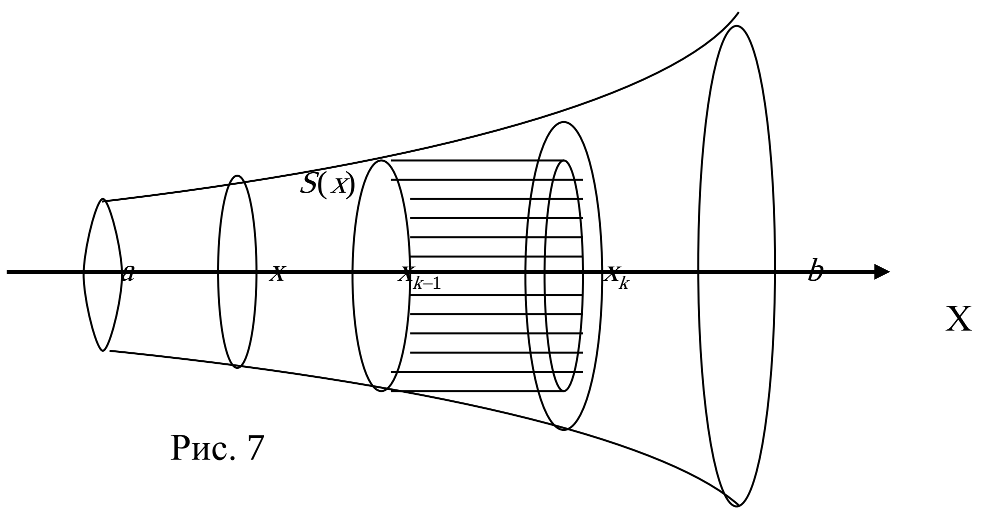

Рис. 7

Делим промежуток $[a,b]$ на n элементарных частей и через точки деления проводим плоскости, перпендикулярные оси Ox. Эти плоскости разобьют B на элементарные слои. Рассмотрим k-ый слой, ограниченный плоскостями $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$. Объем этого слоя приближенно равен объему цилиндра с основанием , равным $S(x_{k-1})$, и высотой Δx_k, так что $\Delta V_k \approx S(x_{k-1})\Delta x_k$. Сумма объемов элементарных цилиндров приближенно равна $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} S(x_{k-1})\Delta x_k$.

Объем тела определим как предел величины σ_n при стремлении λ_n к нулю. Этот предел существует в силу непрерывности $S(x)$ и равен определенному интегралу

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{4}$$

В частности, если тело ограничено поверхностью вращения линии $y = f(x)$ вокруг оси Ox в пределах изменения x от a до b, то $S(x) = \pi\ f^2(x)$ и

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{5}$$

Пример. Вычислить объем шара радиусом R. По формуле (5) при $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ получаем

$$V = \pi\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Примеры для самостоятельного решения.

№	Задание	Ответ
1.	Найти объем тела, получающегося от вращения вокруг оси OX площади, ограниченной осью OX и параболой $y = 3x - x^2$.	$8{,}1\pi$
2.	Найти объем эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ вокруг оси OX.	24π
3.	Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX кривой $y = \sin^2 x$ в промежутке $x = 0$ и $x = \pi$.	$\frac{3}{8}\pi^2$
4.	Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, содержащейся между параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.	$0{,}3\pi$

2.9. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Что называется определенным интегралом от данной функции? Каков его геометрический смысл?
2. Как связаны между собой понятия определенного и неопределенного интеграла?
3. Сформулируйте теорему о производной определенного интеграла с переменным верхним пределом.
4. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
5. Дайте определение несобственных интегралов с бесконечным пределом интегрирования.

3. ТРЕНИНГ-ТЕСТ

Выбрать один правильный ответ:

1. Найти какую-нибудь первообразную к функции $f(x)=\sin 3x$.

A) $\frac{1}{3}\cos 3x$; B) $-\frac{1}{3}\cos 3x$; C) $3\cos 3x$; D) $-\frac{1}{3}\cos x$;

2. Найдите $F(x)$, если $F'(x)=3x^2-4x$ и $F(0)=1$.

A) $F(x)=x^3-x^2+1$; B) $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+1$;

C) $F(x)=x^3-2x^2+1$; D) $F(x)=6x-4$;

3. Сделать в интеграле $\int x\cdot 5^x dx$ замену $x=t^2$:

A) $\int x\cdot 5^x dx=2\int t^3\cdot 5^{t^2}dt$; B) $\int x\cdot 5^x dx=\int t^2\cdot 5^{t^2}dt$;

C) $\int x\cdot 5^x dx=2\int t^4\cdot 5^{t^2}dt$; D) $\int x\cdot 5^x dx=\int t^3\cdot 5^{t^2}dt$;

4. Найти интеграл $\int x\cos x dx$:

A) $\frac{x^2}{2}\cos x+C$; B) $x\cos x-\sin x+C$;

C) $x\sin x-\cos x+C$; D) $x\sin x+\cos x+C$;

5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x-3}}$.

A) $\ln\sqrt{x-3}+C$; B) $\sqrt{x-3}+C$;

C) $2\sqrt{x-3}+C$; D) $2\ln|x-3|+C$;

6. Функция $F(x)$ называется первообразной к функции $f(x)$ на множестве D, если:

A) $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in D$;

B) $F'(x)=f(x)$ в некоторой точке $x\in D$;

C) $f'(x)=F(x)$ для всех $x\in D$;

D) $f'(x)=F(x)$ в некоторой точке $x\in D$;

7. Найти интеграл $\int(\cos 2x+3\sin 4x)dx$.

A) $\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{3}{4}\cos 4x+C$; B) $\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{3}{4}\cos 4x+C$;

C) $-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{3}{4}\cos 4x+C$; D) $\sin 2x-3\cos 4x+C$;

8. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1}x^3 dx$.

A) 1/4; B) 1/2; C) 0; D) 2;

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+3$ и $y=5-x$.

A) 4,5; B) 6; C)13/3; D)8;

10. Указать формулу интегрирования способом замены переменной.

A) $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))dt$, где $x=\varphi(t)$;

B) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi(t)dt$, где $x = \varphi(t)$;

C) $\int f(x)dx = \int f(t)dt$;

D) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, где $x = \varphi(t)$;

11. Если функция $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ непрерывна и $F(x)$-ее первообразная, то имеет место формула Ньютона-Лейбница:

A) $\int\limits_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$;

B) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$;

C) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$;

D) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$;

12. Сделать замену $t = 5 - x^2$ в интеграле $\int\limits_0^1 x(5 - x^2)^4 dx$:

A) $-2\int\limits_5^4 t^4 dt$;

B) $-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^4 dt$;

C) $\frac{1}{2}\int\limits_4^5 t^4 dt$;

D) $\int\limits_5^4 \sqrt{5-t}\cdot t^4 dt$;

13. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 (2x^3 - 3x)dx$.

A) 3,5; B) 1; C) 3; D) 1,5;

14. Вычислить интеграл $\int\limits_2^3 \frac{x-2}{x+3}dx$.

A) $1 + 5\ln\frac{5}{6}$;

B) $1 + 5\ln\frac{6}{5}$;

C) $1 + \ln\frac{5}{6}$;

D) $1 + arctg\frac{2}{3}$;

15. Вычислить $\int\limits_0^\pi x\sin x dx$.

A) π-2; B) 2; C) 0; D) π;

Правильные ответы на тренинг-тест см. приложение 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
2. Гимаев Р.Г., Умергалина Т.В. Введение в математический анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной: Учебное пособие. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 1997.
3. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1967.
4. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Наука, 1964.
5. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2006.
6. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 классов – М.: Просвещение, 2001.

Приложение 1

Правильные ответы на тренинг-тест

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Вариант ответа	B	C	A	D	C	A	B	C	A	D	B	C	C	A	D